Théorème d'inversion locale :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer le théorème d'inversion locale en calcul différentiel.

Dans tout ce développement, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de E, $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$.

Théorème 1 : Théorème d'inversion locale [Gourdon, p.341] :
Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $a \in \mathcal{U}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que df_a est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $\widetilde{\mathcal{U}}$ de a et $\mathcal{W}$ de $f(a)$ tels que :
$*$ $f|_{\widetilde{\mathcal{U}}} : \widetilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{W}$ soit une bijection.
$*$ $g = f|_{\widetilde{\mathcal{U}}}^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{U}}$ est continue.
$*$ g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$, $dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Preuve :
Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $a \in \mathcal{U}$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $df(a)$ est inversible.
$*$ Quitte à considérer la fonction $x \longmapsto df_a^{-1}(f(a+x) - f(a))$, on peut supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_a = \mathrm{Id}_E$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, df est continue et donc :

$$\exists r > 0 \text{ tq } \mathcal{B}_f(0,r) \subseteq \mathcal{U} \text{ et } |||df_x - df_0||| = |||df_x - \mathrm{Id}_E||| \leq \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{B}_o(0,r)$, $|||df_x - \mathrm{Id}_E||| < 1$ et donc $(df_x - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Id}_E$ est inversible et d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (df_x - \mathrm{Id}_E)^n$. D'où :

$$\left|\left|\left|df_x^{-1}\right|\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||df_x - \mathrm{Id}_E|||^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

$*$ Soit $y \in \mathcal{B}_o\left(0, \frac{r}{2}\right)$.
Posons $h : x \longmapsto x + y - f(x)$.
On a h de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathcal{B}_o(0,r)$, $|||dh_x||| = |||\mathrm{Id}_E - df_x||| \leq \frac{1}{2}$. Donc par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x, x' \in \mathcal{B}_f(0,r),\ \left\|h(x) - h(x')\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\| \text{ (par continuité de } \|\cdot\| \text{ et } h)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathcal{B}_f(0,r)$:

$$\|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \|h(x) - h(0)\| < \frac{1}{2}(r + \|x\|) \leq r$$

Donc h est une fonction $\frac{1}{2}$-contractante de $\mathcal{B}_f(0,r)$ dans $\mathcal{B}_o(0,r) \subseteq \mathcal{B}_f(0,r)$ (qui est complet). Ainsi, par le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in \mathcal{B}_f(0,r)$ tel que $h(x) = x$ et puisque $h\left(\mathcal{B}_f(0,r)\right) \subseteq \mathcal{B}_o(0,r)$, on a $x \in \mathcal{B}_o(0,r)$ et $f(x) = y$.

On pose alors $\widetilde{\mathcal{U}} = f^{-1}\left(\mathcal{B}_o\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) \cap \mathcal{B}_o(0,r)$ et $\mathcal{W} = \mathcal{B}_o\left(0, \frac{r}{2}\right)$.
L'application $f|_{\widetilde{\mathcal{U}}} : \widetilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{W}$ est alors une bijection et on note g son inverse.

$*$ On pose h définie sur $\mathcal{B}_o(0,r)$ par $h(x) = x - f(x)$.
Pour tout $x \in \mathcal{B}_o(0,r)$, on a alors $x = h(x) + f(x)$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\forall x, x' \in \mathcal{B}_o(0,r),\ \left\|x - x'\right\| &\leq \left\|h(x) - h(x')\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\|\end{aligned}$$

Donc $\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$ et ainsi :

$$\forall y, y' \in \mathcal{W},\ \left\|g(y) - g(y')\right\| \leq 2\left\|y - y'\right\|$$

Finalement, g est une application 2-lipschitzienne et donc continue.

$*$ Soit $y \in \mathcal{W}$.
Il existe alors $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ tel que $f(x) = y$.
Soit $w \in E$ tel que $y + w \in \mathcal{W}$ et posons $v = g(y+w) - g(y)$.
On a alors $\|v\| \leq 2\|w\|$ et $w = f(x+v) - f(x)$ (car $v + x = g(y+w)$). Donc :

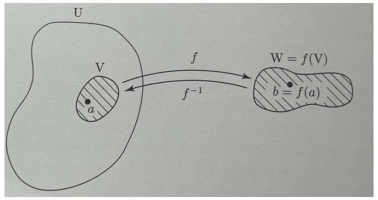
$$\begin{aligned}\Delta(w) &= g(y+w) - g(y) - df_x^{-1}(w) = v - df_x^{-1}(f(x+v) - f(x)) \\ &= -df_x^{-1}(f(x+v) - f(x) - df_x(v))\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\|\Delta(w)\| \leq \left|\left|\left|df_x^{-1}\right|\right|\right| \|f(x+v) - f(x) - df_x(v)\| \leq 2\|v\|\varepsilon(v)$ (avec $\lim_{v \to 0} \varepsilon(v) = 0$). D'où :

$$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y+w) - g(y)) \underset{w \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ (par continuité de } g)$$

Finalement, g est différentiable en $y = f(x)$ et $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ et par continuité de l'inverse et de df, on a que dg est continue et ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.

■



II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé le théorème du point fixe de Banach dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

Théorème 2 : Théorème du point fixe de Banach [Gourdon, p.21] :
Soient (E,d) un espace métrique complet et une application $f : E \longrightarrow E$.
Si f est k-contractante, alors f admet un unique point fixe sur E.

II.2 Pour aller plus loin...

Le théorème d'inversion locale possède beaucoup de conséquences et on en donne ici deux :

Corollaire 3 : [Gourdon, p.343]
Soient E et F deux espaces de Banach et U un ouvert de E.
Si $f : U \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$, df_x soit inversible, alors f est une application ouverte.

Preuve :
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que pour tout $x \in \mathcal{U}$, df_x soit inversible.
On considère Ω un ouvert de U et $x \in \Omega$.
Par le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert $V_x \subseteq \Omega$ et un voisinage ouvert W_x de $f(x)$ tels que $f|_{V_x}$ soit une bijection de V_x sur W_x.
En particulier, $f(V_x) = W_x$ et on a alors :

$$f(\Omega) = f\left(\bigcup_{x\in\Omega} V_x\right) = \bigcup_{x\in\Omega} f(V_x) = \bigcup_{x\in\Omega} W_x$$

Ainsi, $f(\Omega)$ est un ouvert de F et donc f est une application ouverte.

■

Théorème 4 : Théorème d'inversion globale [Gourdon, p.343] :
Soient E et F deux espaces de Banach et U un ouvert de E.
Si f est injective et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ Pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinue.
$*$ $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \longrightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve :
Soient E et F deux espaces de Banach et U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ une application injective et de classe $\mathcal{C}^1$.
$*$ Supposons que pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinue.
D'après le corollaire précédent, $V = f(U)$ est un ouvert. La fonction f est donc une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert V.

Soient $x \in U$ et $y = f(x) \in V$.
Par le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert A de x et un voisinage ouvert B de $f(x)$ tels que $f|_A : A \longrightarrow B$ soit bijective et $f|_A^{-1}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.
Comme $f^{-1}|_B = f|_A^{-1}$, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $f(x)$ (ici B) et puisque ceci est vrai pour tout $x \in V$, on a finalement que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

$*$ Supposons que $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \longrightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
En notant $g = f^{-1}$, on a $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ et donc puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a $dg_{f(x)} \circ df_x = \mathrm{Id}_E$ pour tout $x \in U$.
De même, la relation $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ entraîne que $df_x \circ dg_{f(x)} = \mathrm{Id}_F$ pour tout $x \in U$.
On en déduit que pour tout $x \in U$, df_x est inversible et d'inverse $dg_{f(x)}$, donc continu.

Ainsi, on a démontré l'équivalence voulue.

■

Remarque 5 : [Gourdon, p.343]
D'après le théorème de Banach, une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach est bicontinue. Donc dans les deux résultats précédents, on peut remplacer l'hypothèse "df_x est inversible et bicontinue" par "df_x est inversible" (df_x est forcément continue par définition d'une différentielle).

II.3 Recasages

Recasages : 214 - 215.

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.